In data 01/07/2021, il piú grande primo noto é $2^82589933 - 1$?

Pietro Maiorana Montes

01 Luglio, 2021

Abstract

Si afferma che l'ultimo primo di Mersenne verificato sia il piú grande primo noto ma attraverso il numero di Lehmer associato a quest'ultimo vedremo che non dovrebbe essere cosí.
Per avere una visione d'insieme dei calcoli e delle sequenze impiegate, dove possibile utilizzeró le denominazioni comunemente accettate e pubblicate sulla nota enciclopedia delle sequenze, gratuita e liberamente accessibile online, qual'é Oeis.

I primi di Mersenne, abbreviati M(p), sono numeri primi della forma $2^p - 1$ con p primo.
Di seguito si riportano i valori di p noti alla data di redazione dell'articolo ed utili per generarli.

- **Oeis A000043 Esponenti p tali che $2^p - 1$ sia primo** [1];

  {2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917, 20996011, 24036583, 25964951, 30402457, 32582657, 37156667, 42643801, 43112609, 57885161, 74207281, 77232917, 82589933}

[1] url https://oeis.org/A000043

Dal momento che non tutti i numeri della forma $2^p - 1$ sono primi si rende necessario verificare ogni possibile esponente attraverso test.

Un test valido ad oggi disponibile é quello ideato da Lehmer, egli intui che $2^p - 1$ risulterá primo quando esso é divisore di un altro numero chiamato Lucas-Lehmer, abbreviato L(n)

Ad esempio, se noi volessimo dimostrare la primalitá di $2^5 - 1$ non ci resta che generare il relativo numero L(5) ed impostare la divisione tra i due. Effettuando i dovuti calcoli vedremo che L(5)=37634 e che 37634/2^5-1=1214. Con ció possiamo affermare con certezza che $2^5 - 1$ é primo.

Tralasciamo per un attimo l'esempio proposto senza spiegare la formazione di L(5), per analizzare i numeri L(n) in generale.
Abbiamo che é possibile associare ad ogni primo o composto di Mersenne nella forma $2^p - 1$ un numero L(p).

Ribadito ció, per il prossimo ragionamento procediamo generando i soli numeri L(p) legati ai primi M(p) partendo proprio da quest' ultimi.

Inseriamo quindi nella formula a seguire i valori p, visionabili nella sequenza Oeis A000043[2] precedentemente richiamata.

$$IntegerPart((2 - sqrt(3))^(2^(p - 2)) + (2 + sqrt(3))^(2^(p - 2))) \tag{1}$$

Escludendo il 2, per i valori (3, 5, 7, ...) i rispettivi numeri L(p) saranno: 14, 37634, 2005956546822746114...

[2] url https://oeis.org/A000043

Per praticitá non proseguiamo oltre dato che L(13) conta centinaia di cifre.

Per il test di primalitá attenzionato avremo che:

$14/(2^3 - 1) = 14/7 = 2$
$37634/(2^5 - 1) = 37634/31 = 1214$
$2005956546822746114/(2^7-1) = 2005956546822746114/127 = 15794933439549182$

A questo punto ritorniamo nuovamente sull'esempio fatto in precedenza in merito ad L(5) ed al corrispettivo $M(5) = 2^5 - 1$ immaginando quest'ultimo come il piú grande primo attualmente noto.

Attenzionando la divisione L(5)/M(5) ci accorgeremmo che restituisce un quoziente Q della forma 2*q con q primo.

Effettivamente da 37634/31 si ottiene 1214 ovvero il prodotto tra 2*607 dove 607 é un numero primo!!
L(5) risulta altresí scrivibile come prodotto $2 * (2^5 - 1) * 607$
Visto ció $2^5 - 1$ non puó essere il piú grande numero primo noto perché superato da 607.

Nemmeno il successivo $2^7 - 1$ puó essere il piú grande numero primo noto perché volendo proseguire nei calcoli avremo che:
$2005956546822746114/(2^7 - 1)$ restituisce il quoziente 15794933439549182 scrivibile come prodotto tra $2 * 7897466719774591$ dove 7897466719774591 é primo!!

L(7) in questo caso corrisponde a $2 * (2^7 - 1) * 7897466719774591$

Ad oggi il piú grande numero primo di Mersenne é $2^82589933 - 1$

Qualora il ragionamento proposto fosse sempre applicabile avremmo che

$$L(82589933)/(2^82589933 - 1) = 2 * q \tag{2}$$

In tal caso un primo piú grande di $2^82589933 - 1$ é q dato dalla seguente operazione:

$$q = (L(82589933)/(2^82589933 - 1))/2 \tag{3}$$